Τυχαίες Μεταβλητές - Κατανομές

S - ενδεχόμενο ← Αδύνατα από μαθηματική άποψη σύνολα.

S = { ⚀ , ⚁ , ... , ⚅ }

{ 1 , 2 , . . . , 6 }

Παράδειγμα

1) Φοιτητής απαντά στην τύχη σε 3 ερωτήσεις σωστά (Σ) ή λάθος (Λ)

S = {ΛΛΛ , ΛΛΣ , ΛΣΛ , ΣΛΛ , ΣΣΛ , ΣΛΣ , ΛΣΣ , ΣΣΣ}

Ενδιαφέρει το πλήθος των σωστών απαντήσεων = X

{ 0 , 1 , 2 , 3 }

Κάθε σωστή κερδίζει μια μονάδα ενώ κάθε λάθος χάνει μια μονάδα. Έστω Y = κέρδος

$S' = \{-3 , -1 , 1 , 3\}$

2) Νόμισμα ρίχνεται μέχρι να εμφανιστεί πρώτη φορά Κορώνα

$S = \{ K, ΓK, ΓΓK, \ldots\ldots, \overbrace{ΓΓ\ldots Γ}^{n-1}K, \ldots \}$

Z = πλήθος των ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί πρώτη φορά κορώνα

$\{ 1, 2, 3, \ldots\ldots, n, \ldots \}$

(Πρώτη προσέγγιση του ορισμού)

Τυχαία μεταβλητή (τ.μ): Κάθε συνάρτηση του αρχικού δ.χ S στο $\mathbb{R}$

Οι τ.μ συμβολίζονται με X, Y, Z, W, x_1, X_1 κ.τ.λ. (κεφαλαία)

Ερώτηση: Μπορώ να υπολογίζω πιθανότητα στο $\mathbb{R}$?

Έχει νόημα μια τ.μ να πάρει μια συγκεκριμένη τιμή και ποια η πιθανότητα η τ.μ να πάρει συγκεκριμένη τιμή?

Παραδείγματα

1) Έστω Y=κέρδος. Τιμές του κέρδους $y = -3, -1, 1, 3$

Έχει νόημα η $P(Y=-3)$ και πόσο είναι

$P(Y=-3) \equiv P(ΠΠΠ) = \frac{1}{8}$

$P(Y=-1) \equiv P(ΠΠΣ, ΠΣΠ, ΣΠΠ) = \frac{3}{8}$

$P(Y=1) \equiv P(ΣΣΠ, ΣΠΣ, ΠΣΣ) = \frac{3}{8}$

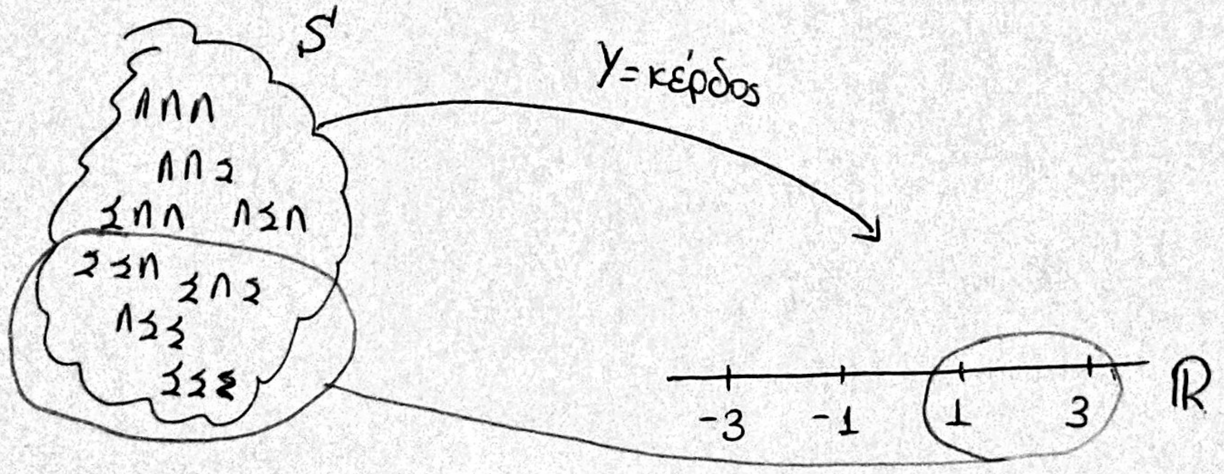
$P(Y=3) \equiv P(ΣΣΣ) = \frac{1}{8}$

2) Έστω Z πλήθος ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά K. Έστω $p = P(K)$ σε οποιαδήποτε ρίψη με $p \in (0,1)$ και αμετάβλητη από ρίψη σε ρίψη. Τότε $P(\Gamma) = 1-p = q$

Τιμές της τ.μ $Z = ?$

Τιμές $Z = 1, 2, \dots, n, \dots$

$$P(Z=n) = P(\underbrace{\Gamma \dots \Gamma}_{n-1} K) \overset{\text{ανεξαρτησία ενδεχομένων}}{=\!=\!=} \underbrace{P(\Gamma) \dots P(\Gamma)}_{n-1} P(K) = q^{n-1} \cdot p = p \cdot q^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



$$P\begin{pmatrix}\text{ο φοιτητής} \\ \text{να κερδίσει}\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}ΣΣΛ \text{ ή } ΣΛΣ \\ ΛΣΣ \text{ ή } ΣΣΣ\end{pmatrix} = P(Y=1 \text{ ή } Y=3) = \frac{4}{8} = 0,5$$

ΟΡΙΣΜΟΣ (πλήρης ορισμός τ.μ)

Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας. Ονομάζουμε τυχαία μεταβλητή (τ.μ) κάθε συνάρτηση $X : S \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε (Borel) υποσύνολο του $\mathbb{R}$ η $X^{-1}(B) = \{ s \in S, X(s') \in B \}$ είναι στοιχείο της σ-άλγεβρας $\mathcal{A}$

Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (α.σ.κ)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω χ.π $(S, \mathcal{A}, P)$. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ X συμβολίζεται με F_X είναι μια συνάρτηση πραγματική $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ορίζεται $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\{ = P$ (όλων των δυνατών τιμών της τ.μ X που είναι $\leq x$) $\forall x \in \mathbb{R} \}$

Παρατήρηση

α) Το πεδίο τιμών της F_X είναι το $[0, 1]$

β) Ποια είναι η πιθανότητα $P(X > x)$?

Προφανώς $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x)$

Παράδειγμα

Έστω τ.μ X με τιμές $x = -3, -1, 1, 3$ και αντίστοιχες πιθανότητες

$P(X = 3) = P(X = -3) = \frac{1}{8}$ και

$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$

Να προσδιοριστεί και να γίνει η γραφική παράσταση της α.σ.κ F_X.